SCIENCE JOURNAL
Ubon Ratchathani University
http://scjubu.sci.ubu.ac.th

วารสารวิทยาศาสตร์ ม. อุบลฯ ฉบับพิเศษ
ปีที่ 1 (มกราคม-ธันวาคม 2554) 101-107

บทความทางวิชาการ
Review Article

พีชคณิตพัวส์ซอง

Poisson algebras

ภิพากย์ จันทร์สุริยะ, นงคราญ สระโสม*
ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติ และคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี
อ.วารินชำราบ จ.อุบลราชธานี 34190

Pipark Chansuriya, Nongkhran Sasom*
Department of Mathematics Statistics and Computer Faculty of Science
Ubon Ratchathani University, Warinchamrap, Ubon Ratchathani, 34190

Received: 22/04/2011; Accepted: 14/06/2011

บทคัดย่อ

พีชคณิตพัวส์ซอง (Poisson algebras) เป็นเรื่องที่น่าสนใจในการศึกษาพีชคณิตในสาขาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (pure mathematics) ในบทความนี้เราจะนำเสนอความรู้พื้นฐาน ที่มา นิยามและตัวอย่างของพีชคณิตพัวส์ซอง นอกจากนี้เรายังได้นำเสนอวิธีการสร้างพีชคณิตพัวส์ซองในลักษณะต่างๆ ด้วย

คำสำคัญ: พีชคณิตพัวส์ซอง, พัวส์ซองไอดีล, พัวส์ซองสมสัณฐาน

Abstract

A Poisson algebra is one of the most interesting topics for mathematicians who work on pure mathematics. We give the introductory concepts, definition and examples. Moreover, we give some the method of constructed Poisson algebra.

Keywords: Poisson algebra, Poisson ideal, Poisson isomorphism.

*Corresponding author. E-mail address: scnongsa@ubu.ac.th

1. บทนำ

การศึกษาวิจัยทางคณิตศาสตร์นับว่าเป็นงานวิจัยที่น่าสนใจและมีความหลากหลายเป็นอย่างยิ่ง คณิตศาสตร์แบ่งออกเป็นสองสาขาใหญ่ๆคือ คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (pure mathematics) และคณิตศาสตร์ประยุกต์ (applied mathematics) ในสาขาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ก็มีอีกหลายเรื่องที่น่าสนใจน่าศึกษาเป็นอย่างยิ่ง โดยเฉพาะในทางพีชคณิตซึ่งนับว่าเป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญอันจะนำไปสู่ทฤษฎีบทต่างๆในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง ผู้เขียนจึงได้แนะนำพีชคณิตที่น่าสนใจและน่าศึกษาค้นคว้าอีกชนิดหนึ่ง นั่นคือ พีชคณิตพัวส์ซอง (Poisson algebras) ซึ่งถือได้ว่าเป็นพีชคณิตที่มีประโยชน์เป็นอย่างยิ่งในการศึกษาทางคณิตศาสตร์และฟิสิกส์

ในบทความนี้กำหนดให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

2. ต้นกำเนิดของพีชคณิตพัวส์ซอง

พีชคณิตพัวส์ซอง (Poisson algebras) เริ่มมีการศึกษาค้นคว้าและเป็นที่รู้จักตั้งแต่ปี ค.ศ. 1809 โดยโจเซฟ หลุยส์ ลากรองจ์ (Joseph-Louis Lagrange) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสและไซมอน เดนิส เดอ พัวส์ซอง (Simon-Danis de Poisson) ซึ่งเป็นลูกศิษย์ของลากรองจ์ ได้นำเสนออัลกอริทึมที่ใช้ในการหาคำตอบของสมการการเคลื่อนที่เรียกว่า “วงเล็บพัวส์ซอง” (Poisson bracket) โดยให้คำนิยามไว้ดังนี้คือ

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$$

โดยที่ $f,g:R^n\times R^n\to R$ เป็นฟังก์ชันเรียบ (smooth function) และ $(p_i,q_i), i=1,2,\ldots,n$ เป็นพิกัดของลากรองจ์ (Lagrange coordinates)

ในปี ค.ศ.1839 คาร์ล จาโคบี (Carl G. J. Jacobi) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันได้คิดค้นวิธีการพิสูจน์ผลลัพธ์ของพัวส์ซองอย่างง่าย โดยกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันและการส่ง (mapping) แบบ $g\mapsto\{f,g\}$ เป็นสนามเวคเตอร์ (vector field) โดยกฎของไลบ์นิซ (Leibniz rule) และสมบัติการมีเอกลักษณ์ไลบ์นิซ (Leibniz identity) ของวงเล็บพัวส์ซอง ทำให้ได้ว่า

$$\{fg,h\}=f\{g,h\}+\{f,h\}g$$

เรียกสนามเวคเตอร์ที่มีสมบัติแบบนี้ว่า **สนามเวคเตอร์ฮามิลโทเนียน** (Hamiltonian vector fields) เขียนแทนด้วย X_f

จาโคบีเกิดข้อสงสัยจากการคิดค้นของเขาว่าสำหรับสนามเวคเตอร์ $X_{\{f,g\}}$ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายของ f กับ g ได้หรือไม่และเขาก็พบคำตอบว่า สำหรับสนามเวคเตอร์ $X_{\{f,g\}}$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$X_{\{f,g\}}=[X_f,X_g]$$

โดยที่ $[-,-]$ เป็นตัวสลับที่ (commutator) ซึ่งกำหนดโดย $[x,y]=xy-yx$

เมื่อประยุกต์ใช้สนามเวคเตอร์ $X_{\{f,g\}}$ กับฟังก์ชัน h ทำให้ได้เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\{\{f,g\},h\}=\{\{g,h\},f\}-\{\{g,f\},h\}$$

และเรียกเอกลักษณ์นี้ว่า **เอกลักษณ์จาโคบี** (Jacobi identity)

ในปีค.ศ. 1879 มาเรียส โซฟัส ลี (Marius Sophus Lie) นักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์ ได้เริ่มศึกษาวิจัยในเชิงลึกบนเรขาคณิตของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (P.D.E) และให้นิยามของวงเล็บพัวส์ซองที่แตกต่างไปจากนิยามของพัวส์ซองและลากรองจ์ จึงทำให้การศึกษาเรื่องของวงเล็บพัวส์ซองเริ่มต้นขึ้น

พีชคณิตพัวส์ซองได้ถูกนำไปใช้หลายแขนงในสาขาวิชาคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ ในทางคณิตศาสตร์ พีชคณิตพัวส์ซองจะศึกษาในลักษณะที่ที่เกี่ยวข้องกับกฎหลักมูลของเรขาคณิตพัวส์ซอง (Poisson geometry) กรุ๊ปควอนตัม (quantum group) และดีฟอเมชันของพีชคณิตสลับที่จัดกลุ่มได้ (deformation of commutative associative algebras) ในทางฟิสิกส์ พีชคณิตพัวส์ซองถือว่าเป็นส่วนสำคัญของดีฟอเมชันควอนไทเซชัน (deformation quantization) กลศาสตร์ฮามิลโทเนียน (Hamiltonian mechanic) และทฤษฎีบทของสนามทอพอโลยี (topological field theories)

3. นิยาม ตัวอย่างและสมบัติพื้นฐานของพีชคณิตพัวส์ซอง

ให้ F เป็น สนามปิดเชิงพีชคณิต (algebraically closed field)

สำหรับการให้นิยามของพีชคณิตพัวส์ซองนั้นมีนักคณิตศาสตร์ได้กำหนดไว้หลายแบบ แต่ในที่นี้จะใช้ในรูปแบบของ Farkas [1]

บทนิยามที่ 1 **(**พีชคณิตพัวส์ซอง: Poisson algebra)

ให้ A เป็นพีชคณิตสลับที่ (commutative algebra) บน F กำหนดให้การส่ง $\{-,-\}: A\times A \to A$ เป็นการส่งแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear map) โดยที่ $\{-,-\}$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $\{a,a\}=0$ สำหรับทุกๆ $a\in A,$
2. $\{a,\{b,c\}\}+\{b,\{c,a\}\}+\{c,\{a,b\}\}=0$ สำหรับทุก $a,b,c\in A,$
3. $\{ab,c\}=a\{b,c\}+b\{a,c\}$ สำหรับทุก $a,b,c\in A$

ถ้า $\{-,-\}$ มีสมบัติสอดคล้องกับข้อ 1 และ 2 แล้วจะเรียกคู่อันดับ $(A,\{-,-\})$ ว่า **พีชคณิตลี** (Lie algebras) และถ้า $\{-,-\}$ สอดคล้องกับสมบัติทั้งสามข้อ แล้วจะเรียกคู่อันดับ $(A,\{-,-\})$ ว่าเป็น **พีชคณิตพัวส์ซอง** (Poisson algebras)

ให้ $(A,\{-,-\})$ เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง และ " $\cdot$ " เป็นตัวดำเนินการ (operator) บนพีชคณิตพัวส์ซอง A แล้วสัจพจน์ (axioms) สำหรับพีชคณิตพัวส์ซองประกอบด้วย

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$
$$\{a,b\}+\{b,a\}=0$$
$$\{\{a,b\},c\}+\{\{c,a\},b\}+\{\{b,c\},a\}=0$$
$$\{a\cdot b,c\}=a\cdot\{b,c\}+\{a,c\}\cdot b$$

สำหรับทุกๆ a,b,c เป็นสมาชิกของพีชคณิตพัวส์ซอง $(A,\{-,-\})$

บทนิยามที่ 2 (พีชคณิตย่อยพัวส์ซอง: Poisson subalgebras)

ให้ A เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง และ B เป็นพีชคณิตย่อย (subalgebra) ของ A จะเรียก B ว่าเป็น **พีชคณิตย่อยพัวส์ซอง** (Poisson subalgebra) ของ

พีชคณิตพัวส์ซอง A ถ้า $\{b,c\} \in B$ สำหรับทุกๆ $b,c \in B$

บทนิยามที่ 3 (ศูนย์กลางของพีชคณิตพัวส์ซอง: Poisson centre)

ให้ A เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง ศูนย์กลาง (centre) ของพีชคณิตพัวส์ซองเขียนแทนด้วย $PZ(A)$ กำหนดโดย

$PZ(A) = \{a \in A | \ \{a,b\} = 0$ สำหรับทุก $b \in A\}$

บทนิยามที่ 4 (พัวส์ซองไอดีล: Poisson ideal)

ให้ A เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง และ I เป็นไอดีล (ideal) ของพีชคณิต A จะเรียก I ว่าเป็นพัวส์ซองไอดีล (Poisson ideal) ถ้า $\{i,a\} \in I$ สำหรับทุกๆ $i \in I$ และ $a \in A$ และพีชคณิตที่อยู่ในรูป A/I เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง ซึ่งกำหนดวงเล็บพัวส์ซอง (Poisson bracket) ดังนี้

$$\{a+I, b+I\} = \{a,b\} + I$$

สำหรับทุกๆสมาชิก $a,b \in A$

บทนิยามที่ 5 (พัวส์ซองสาทิสสัณฐานและพัวส์ซองสมสัณฐาน:Poisson homomorphism and Poisson isomorphism)

ให้ A และ B เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง กำหนดให้ $\varphi : A \to B$ เป็นการส่งจากเซต A ไปเซต B จะได้ว่า φ เป็น**พัวส์ซองสาทิสสัณฐาน** (Poisson homomorphism) ถ้า φ เป็นสาทิสสัณฐานและ $\varphi(\{a,b\}) = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ สำหรับทุก $a \in A$ และทุก $b \in B$

สำหรับพัวส์ซองสาทิสสัณฐานที่เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง (one-to-one and on to) จะเรียกว่า **พัวส์ซองสมสัณฐาน** (Poisson isomorphism)

ตัวอย่างของพีชคณิตพัวส์ซอง

ตัวอย่างที่ 1. ทุกๆพีชคณิตลี (Lie algebras) เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง เมื่อกำหนดให้ $a \cdot b = 0$ และทุกๆพีชคณิตเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative algebra) เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง เมื่อกำหนดวงเล็บพัวส์ซองเป็น $\{a,b\} = 0$

ตัวอย่างที่ 2. ให้ A เป็นพีชคณิตเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative algebras) แล้ว A จะเป็นพีชคณิตพัวส์ซอง ถ้ากำหนดให้ $\{a,b\} = ab - ba$ สำหรับทุก $a,b \in A$

ตัวอย่างที่ 3. ให้ sl_2 เป็นเซตของเมตริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งมีผลรวมของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก (main diagonal) เท่ากับศูนย์หรือเรียกว่า **รอยเมตริกซ์** (trace) โดยกำหนดให้วงเล็บพัวส์ซอง คือ $\{x,y\} = xy - yx$ สำหรับทุกๆสมาชิก $x, y \in sl_2$ และมีฐานหลัก (basis) ของ sl_2 คือ

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (relations) ดังต่อไปนี้คือ

$$\{e, f\} = h, \{h, f\} = -2f, \{h, e\} = 2e$$

จะได้ว่า sl_2 เป็นพีชคณิตพัวส์ซองและเมื่อกำหนดให้ sl_n เป็นเซตของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$

และมีผลรวมของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเท่ากับศูนย์ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction) จะได้ว่า sl_n เป็นพีชคณิตพัวส์ซองอีกด้วย

สำหรับพีชคณิตในบางรูปแบบ สามารถสร้างพีชคณิตพัวส์ซองได้โดยใช้ ควอนไทเซชันและดีฟอร์เมชัน (quantization and deformation) ซึ่ง Jordan และ Sasom [2] ได้สร้างพีชคณิตพัวส์ซองจากพีชคณิตที่มีตัวก่อกำเนิด (generator) x, y, z, t และ t^{-1} ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ดังนี้คือ

$$xy - tyx = (t-1)z$$
$$yz - tzy = (t-1)x$$
$$zx - txz = (t-1)y$$

เมื่อ t เป็นสมาชิกศูนย์กลางและเป็นสมาชิกหน่วย (central element and unit)

จากความสัมพันธ์ของสมาชิกในพีชคณิตนี้ สามารถสร้างพีชคณิตพัวส์ซอง $A = C[x, y, z]$ ที่มีวงเล็บพัวส์ซอง (Poisson bracket) ซึ่งกำหนดโดย

$$\{x, y\} = \frac{1}{t-1}[x, y] = yx + z$$

และในทำนองเดียวกันจะได้

$$\{y, z\} = zy + x \quad \text{และ} \quad \{z, x\} = xz + y$$

สามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่า $\{-,-\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามข้อของวงเล็บพัวส์ซอง ดังนั้น $(A, \{-,-\})$ เป็นพีชคณิตพัวส์ซอง

นอกจากนี้ Sasom [3] ได้สร้างพีชคณิตพัวส์ซองจาก พีชคณิตควอนไทด์เอนเวลลอบปิง (quantized enveloping algebra) $U_q(sl_2)$ เกิดจากการนำเสนอในแนวคิดของ Ito, Terwilliger และ Weng [4] ซึ่งแตกต่างจากนิยามเดิมคือ

ให้ $q \in \mathsf{F}^{\times}$ (โดยที่ F เป็นสนามใดๆ) เป็นสเกลาร์ (scalar) ที่ไม่ใช่ศูนย์ซึ่ง $q \neq \pm 1$ โดยพีชคณิตควอนไทด์เอนเวลลอบปิง (quantized enveloping algebra) $U_q(sl_2)$ เป็นพีชคณิตบนสนาม F ซึ่งเกิดจากตัวก่อกำเนิด 4 ตัวคือ E, F, K, K^{-1} และสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1,$$
$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}},$$
$$KE = q^2 EK, KF = q^{-2} FK$$

จากเงื่อนไขข้างต้นนี้ สามารถเปลี่ยนตัวก่อกำเนิดใหม่เป็น $x^{\pm 1}, y, z$ และสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (relations)

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$
$$\frac{qxy - q^{-1}yx}{q - q^{-1}} = 1$$
$$\frac{qyz - q^{-1}zy}{q - q^{-1}} = 1$$
$$\frac{qzx - q^{-1}xz}{q - q^{-1}} = 1$$

และให้ T เป็นพีชคณิตบน C ที่มีตัวก่อกำเนิด 5 ตัวคือ x, y, z และ $t^{\pm 1}$ และสอดคล้องกับความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$xy - t^{-2}yx = 1 - t^{-2}$$
$$yz - t^{-2}zy = 1 - t^{-2}$$
$$zx - t^{-2}xz = 1 - t^{-2} \quad \text{และ}$$
$$xt = tx, yt = ty, zt = tz,$$
$$tt^{-1} = 1 = t^{-1}t$$

ซึ่งทำให้ t เป็นสมาชิกศูนย์กลาง (central element) ของ T

ให้ $A := {}^{T}\!/_{(t-1)T} \cong C[x,y,z]$ เป็นพีชคณิตพหุนามสลับที่ (commutative polynomial algebra) ซึ่งมีวงเล็บพัวส์ซองคือ

$$\{x,y\} = 2(1-yx),$$
$$\{y,z\} = 2(1-zy),$$
$$\{z,x\} = 2(1-xz)$$

นอกจากสามารถใช้ ควอนไทเซชันและดีฟอร์เมชัน (quantization and deformation) ในการสร้างพีชคณิตพัวส์ซองแล้ว ยังสามารถใช้วงเล็บแม่นตรง (exact bracket) ในการสร้างพีชคณิตพัวส์ซองได้อีกวิธีหนึ่ง ซึ่ง Jordan [5] ได้สร้างพีชคณิตพัวส์ซองจาก ริงเชิงพิกัดของทอรัส (coordinate ring of the torus) $C[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$ ที่มีวงเล็บพัวส์ซอง $\{x_1, x_2\} = x_1 x_2$ ในที่นี้จะแทน ริงเชิงพิกัดของทอรัส ด้วย B

ถ้า $f = xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 4$ เป็นสมาชิกศูนย์กลาง (central element) และให้ π เป็นอัตสัณฐาน (automorphism) ของริงเชิงพิกัดของทอรัส B บน C ซึ่ง $\pi(x_1) = x_1^{-1}$ และ $\pi(x_2) = x_2^{-1}$ แล้วจะได้ว่า π เป็นพัวส์ซองอัตสัณฐาน (Poisson automorphism) ที่กำหนดโดย $\pi(\{x,y\}) = \{\pi(x), \pi(y)\}$ และจะได้ว่า B^π เป็น ริงคงที่ (ring of invariant) ที่ก่อกำเนิดด้วยสมาชิก x, y, z กำหนดให้

$$x := x_1 + x_1^{-1},$$
$$y := x_2 + x_2^{-1},$$
$$z := x_1 x_2 + x_1^{-1} x_2^{-1}$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขคือ $f = xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 4 = 0$

ให้ $\{-,-\}_f$ เป็นวงเล็บแม่นตรง (exact bracket) ซึ่งกำหนดโดย

$$\{x,y\}_f = \frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\{y,z\}_f = \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$\{z,x\}_f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

ดังนั้นสามารถใช้วงเล็บแม่นตรงในการสร้างวงเล็บพัวส์ซองเพื่อทำให้ B^π เป็นพีชคณิตพัวส์ซองได้ โดยที่วงเล็บพัวส์ซองที่สร้างได้สำหรับพีชคณิตพัวส์ซอง B^π คือ

$$\{x,y\} = yx - 2z,$$
$$\{y,z\} = zy - 2x,$$
$$\{z,x\} = xz - 2y$$

นอกจากพีชคณิตพัวส์ซองที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว ยังมีพีชคณิตพัวส์ซองอีกโครงสร้างหนึ่งที่มีการศึกษากันนั่นคือ พีชคณิตพัวส์ซองสลับที่ไม่ได้ (non-commutative Poisson algebra) ซึ่ง Kubo [6] ได้กล่าวถึง พีชคณิตพัวส์ซองแบบสลับที่ไม่ได้ไว้ในงานวิจัยของเขาดังนี้

ให้ A เป็นพีชคณิตเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative algebra) และ $\{-,-\}$ เป็นผลคูณลี (Lie product) ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากับตัวสลับที่จัดกลุ่มได้ (associative commutators) นั่นคือ

$$\{a,b\} = [a,b] := ab - ba$$

สำหรับ $a,b \in A$ หรือกำหนดในรูปทั่วไปเป็น $\{a,b\} = p[a,b]$ เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ให้ k เป็น สนามปิดเชิงพีชคณิต (algebraically closed field) ที่มีลักษณะเฉพาะ (characteristic) เป็น 0 และให้ A เป็นปริภูมิเวคเตอร์ (vector space) บน k ซึ่งมีผลคูณ * เป็นผลคูณของพีชคณิตที่จัดกลุ่มได้ แล้วจะเรียก A ว่าเป็น พีชคณิตพัวส์ซองที่สลับที่ไม่ได้ ถ้าผลคูณลี $\{-,-\}$ บน A สอดคล้องกับกฎของไลบ์นิซ (Leibniz law)

$$\{a*b,c\} = \{a,c\}*b + a*\{b,c\}$$

สำหรับทุกๆสมาชิก $a,b,c \in A$

ถ้าให้ A เป็นพีชคณิตเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative algebra) และมีผลคูณ * เมื่อกำหนดผลคูณลี $[-,-]_p^*$ บน A สำหรับ $p \in k$ โดย $[x,y]_p^* = p[(x*y)-(y*x)]$ สำหรับ $x,y \in A$ แล้วจะได้ว่า $(A,*,[-,-]_p^*)$ เป็นพีชคณิตพัวส์ซองแบบสลับที่ไม่ได้

4. บทสรุป

พีชคณิตพัวส์ซองถือว่าเป็นพีชคณิตที่สำคัญและมีประโยชน์มากในการศึกษาทางคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ การศึกษาโครงสร้างและคุณสมบัติของพีชคณิตพัวส์ซองจึงเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่ง เพื่อที่จะได้อัลกอริทึมตัวใหม่ที่เกิดจากพีชคณิตพัวส์ซองอันจะนำไปใช้ประโยชน์ในทางกลศาสตร์ฟิสิกส์และด้านอื่นๆ และเพื่อเป็นการขยายงานวิจัยทางพีชคณิตให้มีขอบเขตที่กว้างขวางและเป็นที่รู้จักของนักวิจัยทางคณิตศาสตร์และฟิสิกส์อีกด้วย

เอกสารอ้างอิง

[1] Farkas, D.R. (2000). *Modules for Poisson algebras, Communications in Algebra*, *28* (7), 3293-306.

[2] Jordan, D.A., & Sasom, N. (2009). *Reversible skew Laurent polynomial rings and Deformations of Poisson Automorphisms*, Journal of Algebra and its Applications, *8*, 733-57.

[3] Sasom, N. (2006). *Reversible skew Laurent polynomial rings, rings of invariant and related rings*, Ph.D. thesis (University of Sheffield).

[4] Ito, T., Terwilliger, P., & Weng, C. (2006). *The quantum algebra Uq(sl2) and its equitable pre-sentation*, Journal of Algebra, *298*, 284-301.

[5] Jordan, D.A. (2010). *Finite-Dimentional Simple Poisson Modules*, Journal of Algebra Representation Theory, *13*, 79-101

[6] Kubo, F. (1996). *Finite-Dimensional non-commutative Poisson algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, *113*, 307-314.