

บทความทางวิชาการ
Review Article

อวกาศกลุ่มลี

Lie Group Space

ศราวุธ แสณการุณ*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

อ.วารินชำราบ จ.อุบลราชธานี 34190

Sarawut Saenkarun*

*Department of Mathematics Statistics and Computer Science, Faculty of Science
Ubon Ratchathani University, Warinchamrap, Ubon Ratchathani, 34190*

Received: 04/10/2010; Accepted: 10/06/2011

บทคัดย่อ

บทความวิชาการนี้สนใจกลุ่มลีในฐานะโครงสร้างของอวกาศโดยเริ่มจากพัฒนาการของวิทยาศาสตร์ในพัฒนาการของวิทยาศาสตร์นั้นนักวิทยาศาสตร์ได้พยายามอธิบายอนุภาคและแรงพื้นฐานทั้งหมดในธรรมชาติด้วยทฤษฎีเพียงทฤษฎีเดียวซึ่งอาจเป็นทฤษฎีซูเปอร์สตริงที่อาศัยคณิตศาสตร์ที่มีกลุ่มลีเป็นส่วนสำคัญ

คำสำคัญ: ทฤษฎีซูเปอร์สตริง, กลุ่มลี

Abstract

This review article is concerned with Lie groups as a structure of the space. We start with the development of science. In the development, one attempt to explain all of the particles and fundamental forces of nature in one theory. The superstring theory is a candidate for the theory and Lie groups is an important part of mathematics in the superstring theory.

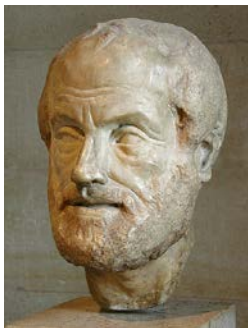
Keywords: Superstring theory, Lie groups.

1. บทนำ

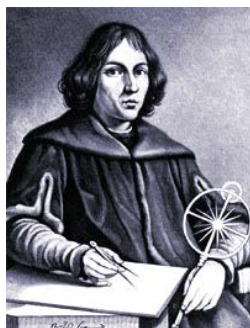
ตั้งแต่อดีตมนุษย์ได้แสวงหาความจริงของธรรมชาติ หากคำตอบของปรากฏการณ์ต่างๆ พยายามเข้าใจวิธีการ การดำเนินการของธรรมชาติ เพื่อนำความรู้ ความเข้าใจนั้น มาใช้ประโยชน์ อำนวยความสะดวกในการดำรงชีวิตโดยวิธีการต่างๆ วิธีที่ได้รับการยอมรับวิธีหนึ่งก็คือวิธีการทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งเป็นวิธีการที่มีการทดลอง การพิสูจน์ความจริงต่างๆ อย่างรัดกุม

คำถามหนึ่งที่มนุษย์เรหาคำตอบมานานมาก และก็ได้คำตอบที่ชัดเจนขึ้นเรื่อยๆ ก็คือเราอยู่ที่ไหน สมัยก่อนเราเชื่อว่าเราอยู่บนโลกที่แบนและโลกเป็นศูนย์กลางของจักรวาล แต่ด้วยการสังเกตปรากฏการณ์บางอย่างทำให้หลายคนเชื่อว่าโลกอาจจะไม่แบนอย่างที่เรานึกกัน อย่างเช่นในการเดินเรือ ทำไมเรามองเห็นแค่เสากระโดงเรือที่อยู่ไกลๆ โดยไม่เห็นตัวเรือ

มีการบันทึกไว้ว่าเมื่อประมาณ 340 ปีก่อนคริสตกาล หรือเมื่อพระพุทธเจ้าได้ประกาศศาสนาพุทธไปแล้วประมาณ 200 ปี อริสโตเติล (Aristotle) นักปราชญ์ชาวกรีกได้ตั้งความเห็นไว้ว่าโลกเรา



รูปที่ 1 อริสโตเติล (พ.ศ. 160-222)

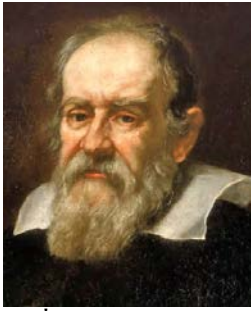


รูปที่ 2 นิโคเลาส์ โคเปอร์นิคัส (พ.ศ.2016-2086)

ไม่ได้แบนอย่างที่คิดแต่โลกมีลักษณะกลมต่างหาก แต่ตอนนั้นหลายคนรวมทั้งอริสโตเติลก็เชื่อว่าโลกเป็นศูนย์กลางของจักรวาล ดาวทุกดวงโคจรเป็นวงกลมรอบโลก

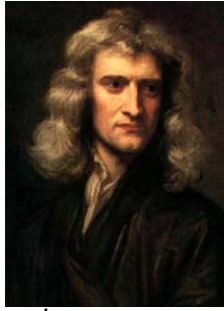
จนกระทั่งประมาณ 500 ปี ก่อนหน้านั้น นิโคเลาส์ โคเปอร์นิคัส (Nicholaus Copernicus) ได้เสนอแนวความคิดที่ว่าโลกไม่ได้เป็นศูนย์กลางของจักรวาลแต่โลกหมุนรอบดวงอาทิตย์ ต่างหาก แนวความคิดนี้ไม่ได้ถูกเผยแพร่ แม้แต่โคเปอร์นิคัสเองก็เสนอแนวความคิดนี้โดยใช้นามแฝง ทั้งนี้เป็นเพราะแนวความคิดนี้ได้ขัดแย้งกับหลักศาสนาซึ่งมีอิทธิพลมากในขณะนั้น

อีกหนึ่งร้อยปีต่อมากาลิเลโอ กาลิเลอี (Galileo Galilei) และโยฮันเนส เคปเลอร์ (Johannes Kepler) ได้สนับสนุนและเผยแพร่ความคิดดังกล่าว โดยกาลิเลโอได้หลักฐานที่ว่าดวงดาวทุกดวงไม่ได้หมุนรอบโลกจากกล้องโทรทรรศน์ที่เขาสร้างขึ้นเอง เพื่อสังเกตดวงดาวต่างๆ นักวิทยาศาสตร์ในสมัยนั้นรู้ว่าดาวเคราะห์หมุนรอบดวงอาทิตย์ แต่ก็ไม่รู้ว่าทำไมมันถึงหมุนรอบดวงอาทิตย์หรือหมุนรอบดวงอาทิตย์ด้วยวิธีการใด จวบจนกระทั่งอีกหนึ่งร้อยปีต่อมา หรือประมาณ 300 ปี ก่อนหน้านั้น นิวตัน (Sir Isaac Newton) ได้เสนอแนวความคิดที่ว่าดวงดาวหมุนรอบกันได้อย่างไร แรงโน้มถ่วงและกลศาสตร์ของนิวตันได้ถูกนำมาอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง งานของนิวตันได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวาง และเป็นแบบฉบับของฟิสิกส์ฉบับคลาสสิกในปัจจุบัน เหตุผลหนึ่งก็คือนิวตันได้ใช้คณิตศาสตร์มาอธิบาย และพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เขาได้ตั้งไว้ ซึ่งเป็นที่รู้ดีว่าคณิตศาสตร์ที่เขาใช้คือแคลคูลัส และปัจจุบันแคลคูลัสก็กลายเป็นพื้นฐานสำหรับผู้



รูปที่ 3 กาลิเลโอ กาลิเลอี

(พ.ศ. 2107-2145)



รูปที่ 4 เซอร์ไอแซก

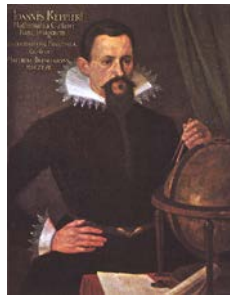
นิวตัน (พ.ศ. 2186-2270)

จะศึกษาวิทยาศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์ประยุกต์สาขาต่างๆ นิวตันได้ชื่อว่าเป็นผู้ค้นพบแคลคูลัสร่วมกับไลบ์นิตซ์ (Gottfried Wilhelm von Leibniz) ผู้ซึ่งเป็นนักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันร่วมสมัยกับนิวตัน สำหรับนักวิทยาศาสตร์ในปัจจุบันจะเห็นว่าคณิตศาสตร์นอกจากจะช่วยอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆแล้วยังช่วยทำนายสิ่งต่างๆที่ยังไม่ปรากฏได้อีกด้วย

ประมาณ 150 ปี ก่อนหน้านี้นมนุษย์ได้ค้นพบแรงอีกชนิดหนึ่งเรียกว่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้า โดยเจมส์ เคลิร์ก แมกซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell) ซึ่งได้ใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูงมาช่วยในการอธิบายทฤษฎีต่างๆของเขาในทำนองเดียวกันกับนิวตันและมีความสำเร็จซึ่งถือได้ว่าอยู่ในระดับเดียวกันกับนิวตัน ทฤษฎีทางฟิสิกส์นั้นใช้เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ต่างๆในธรรมชาติโดยใช้ภาษาคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถถูกสืบล้างได้จากการทดลองเพียงแค่ครั้งเดียว เช่น กาลิเลโอได้สืบล้างแนวความคิดที่ว่าดวงดาวทุกดวงหมุนรอบโลก โดยการใช้อุปกรณ์โทรทรรศน์ที่เขาสร้างขึ้นสังเกตดวงจันทร์กาลิเลียน (Galilean) (ตั้งชื่อตามกาลิเลโอ) ของดาวพฤหัสบดี หมุนรอบดาวพฤหัสบดี แต่มีบางครั้งเรามีทฤษฎีใหม่ที่

สืบล้างทฤษฎีเก่าแต่หลายคนก็ยังใช้หรืออ้างอิงทฤษฎีเก่า ดังเช่น เมื่อร้อยปีก่อนไอน์สไตน์ (Albert Einstein) ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป [1] โดยใช้แนวความคิดที่ว่าเวลาและอวกาศเกี่ยวข้งกันไม่มีสิ่งใดสิ่งหนึ่งอยู่อย่างอิสระโดยปราศจากซึ่งกันและกันและอวกาศก็มีการโค้งงอที่เกิดจากมวลของดวงดาวต่างๆ กฎของแรงโน้มถ่วงและกฎการเคลื่อนที่ได้ถูกสร้างขึ้นมาบนเรขาคณิตชั้นสูงที่ได้ศึกษากับดาวิด ฮิลแบร์ท (David Hilbert) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันผู้ยิ่งใหญ่คนหนึ่งที่โลกมีมาและถือได้ว่าเป็นผู้ให้กำเนิดทฤษฎีสัมพัทธภาพด้วยเหมือนกัน ทฤษฎีของนิวตันได้ถูกแทนที่ด้วยทฤษฎีบทสัมพัทธภาพตั้งแต่บัดนั้นเป็นต้นมา แต่จะเห็นว่ายังมีการใช้กฎของนิวตันในปัจจุบัน อาจจะเป็นเพราะว่ากฎของไอน์สไตน์มีความยุ่งยากซับซ้อนมากและกฎทั้งสองจะปรากฏให้เห็นว่าต่างกันอย่างไรเห็นได้ชัดก็ต่อเมื่ออยู่ในสถานการณ์ที่สุดขีด

หลังจากไอน์สไตน์ได้เสนอทฤษฎีบทสัมพัทธภาพมาไม่นาน นักวิทยาศาสตร์ในสมัยนั้นที่ศึกษาลึกลงไปในระดับอนุภาคได้พยายามอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นโดยใช้ทฤษฎีที่เรียกว่าทฤษฎีควอนตัม (Quantum theory) ซึ่งเป็นทฤษฎีที่ใช้



รูปที่ 5 โยฮันเนส เคปเลอร์

(พ.ศ. 2114-2173)



รูปที่ 6 กอทท์ฟรีด -

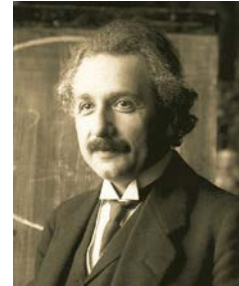
วิลเฮล์ม ไลบ์นิซ

(พ.ศ. 2189-2259)

อธิบายได้ดีที่สุดในระดับอนุภาค และหลังจากนั้นเป็นต้นมาจนถึงปัจจุบัน เราจะใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพอธิบายปรากฏการณ์ที่วัตถุมีมวลขนาดใหญ่และใช้ทฤษฎีควอนตัมอธิบายปรากฏการณ์ในระดับอนุภาค หลังจากยุคของไอน์สไตน์มนุษยเรายังได้ค้นพบแรงพื้นฐานอีกสองชนิดนอกจากแรงโน้มถ่วงและแรงแม่เหล็กไฟฟ้าคือแรงนิวเคลียร์อย่างอ่อนและแรงนิวเคลียร์อย่างเข้ม



รูปที่ 7 เจมส์ แมกซ์เวลล์ (พ.ศ. 2374-2422)



รูปที่ 8 อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ (พ.ศ. 2422-2498)

2. ทฤษฎีสตริงและกลุ่มลี

ความฝืดของนักฟิสิกส์ทั้งหลายก็คือการอธิบายแรงพื้นฐานทั้งหมดด้วยสมการเพียงอันเดียวที่เราจะเรียกว่าทฤษฎีเอกภาพหรือทฤษฎีสรรพสิ่ง นั่นคือการรวมแรงโน้มถ่วง แรงแม่เหล็กไฟฟ้า แรงแม่เหล็กอย่างอ่อนและแรงนิวเคลียร์อย่างเข้มไว้ด้วยกัน ซึ่งการรวมแรงแม่เหล็กไฟฟ้า แรงแม่เหล็กอย่างอ่อนและแรงนิวเคลียร์อย่างเข้ม นั้นได้ทำสำเร็จมาแล้ว แต่การรวมแรงโน้มถ่วงเข้าไปกับแรงทั้งสามซึ่งเป็นโครงสร้างของสิ่งที่เราเรียกว่าแรงโน้มถ่วงควอนตัมนั้นทำให้เกิดข้อขัดแย้งขึ้น เหตุผลที่เราต้องรวมแรงพื้นฐานเข้าด้วยกันอีกเหตุผลหนึ่งก็คือ ในการศึกษาทางจักรวาลวิทยาเรื่องจุดกำเนิดของเอกภพและปรากฏการณ์บิกแบง โดยมีหลายหลักฐานทำให้เชื่อว่ามีปรากฏการณ์นี้ เช่น หลักฐานจากกล้องฮับเบิล (Hubble) ซึ่งเอกภพกำลังขยายตัวออก จึงเป็นที่คาดเดาว่าแต่ก่อนวัตถุต่างๆจะอยู่ใกล้ชิดกันและค่อยๆขยายตัวออก กฎทางฟิสิกส์ที่เราใช้อยู่ในปัจจุบันนี้ไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์บิกแบงได้ เพราะว่าในปรากฏการณ์บิกแบง เมื่อเอกภพถูกแรงโน้มถ่วงมหาศาลบีบอัดจนเหลือขนาดเล็กกว่าขนาดของอะตอมและมีมวลเป็นอนันต์ ทฤษฎีสัมพัทธภาพ

หรือทฤษฎีควอนตัมก็ไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆในสถานการณ์นี้ได้

ไอน์สไตน์อาจจะเป็นบุคคลแรกๆในการค้นหาทฤษฎีบทเอกภาพนี้ ในบั้นปลายชีวิตของไอน์สไตน์เขาได้พยายามที่จะรวมแรงโน้มถ่วงและแรงแม่เหล็กไฟฟ้าเข้าด้วยกัน ในขณะที่นักฟิสิกส์คนอื่นสนใจในทฤษฎีควอนตัมและมองว่าไอน์สไตน์ได้หลงทางทำสิ่งที่ไร้ประโยชน์ในบั้นปลายของชีวิต ซึ่งมีหลายสิ่งที่ทำให้ไอน์สไตน์ไม่สนใจทฤษฎีควอนตัมก็คือเขายังเชื่อในสมการที่ทำนายอดีตหรืออนาคตได้อย่างแน่นอน เช่น ถ้ารู้ความเร็วและเวลาที่ตรงตำแหน่งและไม่เชื่อสิ่งที่ไม่แน่ว่าจะเกิดหรือไม่เกิดตามทฤษฎีควอนตัม หรือคณิตศาสตร์ในทฤษฎีควอนตัมอนุญาตให้มีการส่งข้อมูลในระยะไกลในทันทีทันใด แต่การทดลองในปัจจุบันได้ยืนยันว่าสิ่งนี้เกิดขึ้นได้

มีสองสามทฤษฎีที่พยายามรวมแรงพื้นฐานที่กล่าวมาทั้งหมด ทฤษฎีสตริง (String theory) [2,3,9] เป็นอีกทฤษฎีหนึ่งที่เป็นคู่แข่งที่จะเป็นทฤษฎีเอกภาพและได้รับความนิยมในปัจจุบัน ทฤษฎีนี้ไม่ได้มองอนุภาคเป็นจุดแต่มองอนุภาคเป็นเส้น เส้นที่สั้นด้วยความถี่ต่างกันทำให้เกิดอนุภาคที่ต่างกัน

เส้นที่สั้นด้วยความถี่หนึ่งอาจเป็นอนุภาคควาร์ก แต่เส้นที่สั้นด้วยความถี่หนึ่งอาจเป็นอนุภาคอิเล็กตรอน ทฤษฎีสตริงได้ถูกปรับปรุงเป็นทฤษฎีซูเปอร์สตริง (Superstring theory) ด้วยการรวมเหนือสมมาตร (Supersymmetry) เข้ากับทฤษฎีสตริง การรวมกันของทฤษฎีสัมพัทธภาพและทฤษฎีควอนตัมจำเป็นต้องใช้มิติทั้งหมด 10 มิติ นั่นคือมีมิติพิเศษที่เราสัมผัสไม่ได้จำนวน 6 มิติ (ปกติเรารู้จัก 4 มิติ นั่นคือสามมิติรวมอีกหนึ่งมิติของเวลา) นักฟิสิกส์ได้หาทฤษฎีซูเปอร์สตริงออกมา 5 แบบ ด้วยกันซึ่งต่างก็ถูกต้องทั้งหมด แต่ทุกคนก็คิดว่าทฤษฎีเอกภาพควรจะมียี่สิบเดียว ก่อนหน้านี้นี้ประมาณยี่สิบปีมีทฤษฎีซูเปอร์สตริงอีกแบบปรากฏออกมาซึ่งบอกว่าทฤษฎีซูเปอร์สตริงทั้ง 5 แบบ คือทฤษฎีเดียวกัน ทฤษฎีซูเปอร์สตริงนี้จะถูกเรียกว่าทฤษฎีเอ็ม (Membrane theory, M theory) หรือบางทีจะถูกเรียกว่าจุดกำเนิดของทุกทฤษฎีซึ่งมีมิติทั้งหมด 11 มิติ [4]

ในทางฟิสิกส์เราสนใจเรื่องความสมมาตร (Symmetry) ความสมมาตรในทางฟิสิกส์หมายความว่าระบบต่างๆจะไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงในแบบต่างๆ เช่น ระบบที่เหมือนกันไม่ว่าจะย้ายไปที่พิกัดใดก็ยังคงมีคุณสมบัติที่เหมือนกัน กลุ่มของการแปลงเหล่านี้ร่วมกับคุณสมบัติบางอย่างทางคณิตศาสตร์จะถูกเรียกว่ากลุ่มลี (Lie group) ในทฤษฎีซูเปอร์สตริง กลุ่มลีจะถูกใช้ในฐานะเป็นกลุ่มสมมาตร (Symmetry group) หรือกลุ่มเกจ (Gauge group) ของทฤษฎี หรือเป็น โครงสร้างของมิติพิเศษ กลุ่มลีตั้งชื่อตามนักคณิตศาสตร์ชาวอร์เวย์ โชฟัส ลี (Marius Sophus Lie) ซึ่งมองเห็นความสมมาตรของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และใช้ประโยชน์จากความสมมาตรนี้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุ-



รูปที่ 9 ดาวิด ฮิลเบิร์ต
(พ.ศ. 2405-2486)



รูปที่ 10 โฟล็ค ลี
(พ.ศ. 2385-2442)

พันธ์ อันที่จริงแล้วการใช้ความสมมาตรมีมาก่อนบ้างแล้ว โดยมีปรากฏในงานของออยเลอร์และเกาส์

กลุ่มลีจะประกอบด้วยโครงสร้างหลักๆของคณิตศาสตร์อยู่สามส่วน คือ พีชคณิตคือความเป็นกลุ่ม (Group) คณิตศาสตร์วิเคราะห์คือทอพอโลยี (Topology) และ เรขาคณิตคือแมนิโฟลด์ (Manifold) จะเห็นว่ากลุ่มลีบางชนิดจะถูกใช้เป็นที่โครงสร้างของกาลอวกาศ (Space-time) ซึ่งเรารู้ว่ากาลอวกาศนั้นโค้งงอจากมวลของวัตถุต่างๆ ในอวกาศ การใช้เรขาคณิตของแมนิโฟลด์นั้นจะเป็นการบอกรูปร่างของอวกาศอย่างไม่ชัดเจน ถึงแม้ว่าการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ของปวงกาเร (Poincare conjecture) จะประสบความสำเร็จโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อเพอร์เรลแมน (Perelman) [6,7,8] มาแล้วในปี พ.ศ. 2545 ซึ่งทุกคนคิดว่าน่าจะพอคาดคะเนรูปร่างของอวกาศได้ แต่ตอนนี้ก็ยังไม่ได้ข้อสรุปที่แน่ชัด ซึ่งการที่เราให้ความหมายบางอย่างที่ไม่ชัดเจนก็จะทำให้เราทำงานกับสิ่งนั้นลำบากขึ้น กลุ่มลีจะถูกประกอบด้วยกลุ่มลีอย่างง่าย ซึ่งจะเรียกชื่อตามพีชคณิตลี (Lie algebra) ที่สมนัยกับกลุ่มลีนั่น โดยทั่วไปการศึกษาพีชคณิตลี เพราะว่าบางตัวแทนของกลุ่มลี (Representation of

Lie group) และพีชคณิตที่สมนัยกันเป็นอันเดียวกัน และการศึกษาตัวแทนผ่านพีชคณิตลีก็เป็นสิ่งที่สะดวกกว่า

พีชคณิตลีอย่างง่าย [5] มีทั้งหมด 9 ชนิด ประกอบด้วย พีชคณิตลีที่เรารู้จักโครงสร้างอย่างชัดเจน ซึ่งเราจะเรียกว่าพีชคณิตลีคลาสสิกมีทั้งหมด 4 ชนิด คือ A_1, B_1, C_1, D_1 และพีชคณิตลีที่เราไม่ทราบโครงสร้างอย่างชัดเจนจะถูกเรียกว่าพีชคณิตลีพิเศษ มีทั้งหมด 5 ชนิด คือ G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 ซึ่งกลุ่มลีชนิด G_2 จะถูกนำไปเป็นโครงสร้างของมิติ

พิเศษอีก 7 มิติของอวกาศในทฤษฎีสตริงซึ่งถือว่าเป็นมิติที่เล็กมากจนเราไม่สามารถตรวจพบได้ในปัจจุบัน ตัวอย่างของกลุ่มลีชนิด G_2 ดังเช่นปรากฏในงานของผู้เขียนและอนาโตลี ลูซซูกซ์ (Anatoli Loutsiouk) [11] ในการหาผลเฉลยของบางระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้ ให้ G_2 เป็นกลุ่มลีของอัตโนมัติฐาน (Automorphism) ทั้งหมดของอ็อกโตเนียน (Octonian) และ $Z = Z_-HZ_+$ โดยที่

$$Z_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y & z & u & v & z^2-xv-yu \\ 0 & 1 & w & xw-y & x^2w-xy-z & y^2-xyw+zw & xzw-yz-v-uw \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & z-xy & xz-u \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & -2y & 2z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w & xw-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & x & y & z & u & v & z^2-xv-yu \\ 0 & 1 & w & xw-y & x^2w-xy-z & y^2-xyw+zw & xzw-yz-v-uw \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & z-xy & xz-u \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & -2y & 2z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w & xw-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \right| x,y,z,u,v,w \in \mathbb{C}$$

และ

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{p+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(p+q)} \end{pmatrix} \right\} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} e^{p+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(p+q)} \end{pmatrix}} \right| p,q \in \mathbb{C}$$

และ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน ส่วน Z_- นั้นมีส่วนคล้ายคลึงกับ Z_+ จึงขอละไว้

Z จะหนาแน่น (Dense) ใน G_2 นั่นคือสามารถหาสมาชิกของ G_2 ได้จากการลู่อเข้าของลำดับของสมาชิกใน Z ซึ่งก็ยังไม่ได้โครงสร้าง G_2 อย่างชัดเจนอยู่ดีและในปัจจุบันก็ยังไม่มีการสร้างของ G_2 ออกมาอย่างชัดเจน

กลุ่มลีที่ซับซ้อนที่สุดที่ถูกนำไปเกี่ยวข้องกับทฤษฎีสตริงคือกลุ่มลี E_8 [10] ซึ่งในปี พ.ศ. 2550 กลุ่มนักคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ประมาณ 40 คนได้ประสบความสำเร็จในการหาตัวแทนทั้งหมดของกลุ่มลี E_8 ซึ่งเป็นกลุ่มสมมาตรที่ซับซ้อนที่สุดเท่าที่มนุษย์เคยค้นพบ ซึ่งคาดว่าการทำงานขั้นสุดท้ายใช้ซูเปอร์คอมพิวเตอร์เซจ (Sage supercomputer)

คำนวณติดต่อกัน 3 วัน และข้อมูลที่ได้ก็มากกว่าข้อมูลลำดับของจีโนมของมนุษย์ 60 เท่า

3. บทสรุป

ข้อมูลต่างๆเหล่านี้เป็นความพยายามของมนุษย์ที่จะค้นหาคำตอบหรืออธิบายสิ่งต่างๆที่อยู่รอบตัวเรา ทฤษฎีเอกภาพจะมีจริงหรือไม่หรือจะใช้แต่ละทฤษฎีเพื่อจะอธิบายแต่ละส่วนของปรากฏการณ์ต่างๆอย่างที่กำลังทำอยู่ คำตอบน่าจะอยู่ไม่ไกลด้วยการทดลองต่างๆที่ล้ำสมัยในปัจจุบัน เช่น การทดลองโดยใช้เครื่องเร่งอนุภาคที่สถาบันเซิร์น (CERN) และงานวิจัยบุกเบิกโดยนักวิจัยต่างๆ เหมือนกับในอดีตที่เราเคยทำสำเร็จมาแล้ว

เอกสารอ้างอิง

- [1] Einstein, A. (1916 (translation 1920)). *Relativity: The Special and General Theory*. New York: H. Holt and Company.
- [2] Polchinski, J., *All Strung Out?* <http://www.americanscientist.org/bookshelf/pub/all-strung-out>, 2007.
- [3] Susskind, L., *Hold fire! This epic vessel has only just set sail...*, <http://www.timeshighereducation.co.uk/story.asp?storycode=20499>, 2006.
- [4] Duff, M.J., Liu, J.T., & Minasian, R. *Eleven Dimensional Origin of String/String Duality: A One Loop Test Center for Theoretical Physics*, Department of Physics, Texas A&M University.
- [5] Jacobson, N. (1962). *Lie Algebras*. New York: Interscience.
- [6] Perelman, G. (2002). *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. arXiv:math. DG/ 0211159.
- [7] Perelman, G. (2003). *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. arXiv:math.DG /0303109.
- [8] Perelman, G. (2003). *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. arXiv:math.DG/0307245.
- [9] Mukhi, S. (1999). *The Theory of Strings: A Detailed Introduction*.
- [10] Gates, S.J., *Superstring Theory: The DNA of Reality. Lecture 23—Can I Have That Extra Dimension in the Window?*, http://www.thegreatcourses.com/tgc/course-s/Course_Detail.aspx?cid=1284, 0:04:54, 0:21:00.
- [11] Saenkarun, S., Loutsiouk, A., & Chunrungsikul, S. (2009). Studying solutions of a system of PDE through representations of G_2 . *International Mathematical Forum*, 4, 429-39.